١-٧-١ مستويات فيرمى وكثافة الشحنات

عند تطبيق هذا التوزيع فى درجة حرارة الغرفة المحيطة لمادة السيلكون جوهرية البلورات ذات فجوة طاقية ١و١ إلكترون فولت - فإن فرق الطاقة بين مستوى طاقة التوصيل ومستوى فيرمى يساوى ٥٥و٠ إلكترون فولت تقريبا حوالى واحد وعشرون مرة مضروب ثابت بلتوزمان فى درجة الحرارة المحيطة. فى هذه الحالة فإن الفرق بين مستوى الطاقة تحت الدراسة ومستوى فيرمى ذو قيمة كبيرة جدا بالمقارنة بقيمة حاصل ضرب ثابت بلتوزمان فى درجة الحرارة المحيطة والذى يساوى ٠٢٦و٠ إلكترون فولت وتصبح المعادلة (١-١١) :

$$f(E) = e^{-(E - E_f)/KT}$$ المعادلة (١-١٢)

كما أن إحتمالات وجود مستويات طاقة غير مشغولة بإلكترونات يساوى واحد ناقص إحتمال شغل هذا المستوى بإلكترونات [1-f(E)] ويمكن تحديدة بالمعادلة (١-١٣)

$$1 - f(E) = \frac{1}{1 + e^{(E_F - E)/KT}}$$ المعادلة (١-١٣)

ويمكن تبسيط المعادلة (١-١٣) لتصبح :

$$1 - f(E) = e^{-(E_f - E)/KT}$$ المعادلة (١-١٤)

حيث أن الفرق فى مستوى فيرمى ومستوى التكافئ أكبر بكثير من حاصل ضرب ثابت بلتوزمان فى درجة الحرارة المحيطة ($E_f - E > KT$) - تستخدم المعادلتين (١-١٢) و(١-١٤) لتحديد كثافة الإلكترونات والثقوب الحرة فى مواد أشباه الموصلات٠ عند معرفة كثافة مستويات الطاقة المشغولة بإلكترونات أو الثقوب وكذلك نسبة إحتمالات إشغال مستويات الطاقة يمكن بسهولة تحديد كثافة الإلكترونات الحرة. بإفتراض أن المقدار N(E) يمثل عدد مستويات الطاقة بإلكترون فولت لكل متر مكعب من المادة - وبالتالى فإن كثافة مستويات الطاقة ما بين مستويين (E_1 to E_2) يمكن تمثيلة بالمعادلة (١ - ١٥)

$$S = \int_{E_1}^{E_2} N(E)\,dE$$ المعادلة (١ - ١٥)

عدد الإلكترونات الحرة يساوى عدد مستويات الطاقة ما بين المستويين تحت الدراسة مضروبا فى إحتمالات الإشغال بإلكترونات كما هو موضح فى المعادلة (١ – ١٦)

$$n = \int_{E_{CB}}^{E_{CT}} f(E)N(E)dE$$

المعادلة (١ – ١٦)

وبالتالى يمكن تحديد عدد الإلكترونات الحرة بالمعادلة رقم (١ –١٧)

$$n = N_c e^{-(E_c - E_f)/KT}$$

العادلة رقم (١ –١٧)

حيث المقدار (N_c) يمثل الكثافة الفعلية لمستويات الطاقة فى نطاق مستوى التوصيل:

$$N_c = [\frac{2 m_e KT}{h^2}]^{3/2}$$

العادلة رقم (١ –١٨)

كما أن كثافة الثقوب الحرة يمكن تحديدها بالمعادلة رقم (١ – ١٩)

$$p = N_v e^{-(E_f - E_v)/KT}$$

المعادلة رقم (١ – ١٩)

حيث المقدار (N_v) يمثل الكثافة الفعلية لمستويات الطاقة فى نطاق مستوى التكافئ:

$$N_v = [\frac{2 m_p KT}{h^2}]^{3/2}$$

المعادلة رقم (١ – ٢٠)

وحيث أن الكثافة الفعلية لمستويات الطاقة فى مستوى التوصيل يمكن أن تساوى الكثافة الفعلية لمستويات الطاقة فى نطاق مستوى التكافئ ($N_c = N_v$) وذلك فقط فى حالة أن تكون الكتلة الفعلية لكل من الإلكترونات والثقوب متساوية وبإستخدام المعادلتين (١–١٧) و (١–١٩) يمكن حساب قيم تركيز حاملات الشحنات فى حالة الإتزان والتى تساوى عدد الإلكترونات مضروب فى عدد الثقوب كما هو موضح بالمعادلة (١–٢١)

$$np = N_c N_v e^{-(E_c - E_v)/KT} = N_c N_v e^{-E_g/KT}$$

المعادلة (١–٢١)

مع تناقص الفجوة الطاقية (E_g) بصورة خطية مع درجة الحرارة – فإن مستوى الفجوة الطاقية يتغير طبقا لإرتفاع درجات الحرارة بتغير المعامل (β) كما يلى: ($E_g = E_{go} - \beta$) وتعاد صياغة المعادلة (١–٢١) لتصبح :

$$np = 2.33x10^{43}[{}^{m_e m_p}\!/_{m^2}]^{3/2} T^3 e^{-E_{g_o}/KT} e^{\beta/K}$$ المعادلة (١-٢٢)

حيث أن المقدار (E_{go}) يمثل إتساع الفجوة الطاقية عند درجة الصفر المطلق والثابت (β) يمثل مقدار تغير سعة الفجوة الطاقية مع درجات الحرارة- فى مادة السيلكون – قيمة تركيز الشحنات الجوهرية فى حالة الإتزان يمكن تحديده بالمادلة (١-٢٣)

$$n\ p\ =\ 15\ \ x\,10^{\ 44}\ T^{\ 3}\ e^{\ -1.21\ /\ KT}$$ المادلة (١-٢٣)

فى المواد أحادية البلورات أو الجوهرية تتساوى عدد الإلكترونات والثقوب فإن كثافة التركيز الجوهرى يساوى عدد الإلكترونات مضروبا فى عدد الثقوب ويساوى :

$$n_i^{\ 2} = n\ p$$ المادلة (١-٢٤)

وتسمى هذه الحالة قانون الإتزان الكهربائى[1] ويمكن تطبيق المعادلتين (١-١٧) و(١-١٩) لتحديد عدد الإلكترونات والثقوب فى كل من المواد الجوهرية والغير جوهرية

$$N_c\, e^{-(E_c - E_f)/KT} = N_v\, e^{-(E_f - E_v)/KT}$$ المادلة (١-٢٥)

بأخذ اللوغاريتم لكلا الجانبين فى المادلة (١-٢٥) نحصل على :

$$\ln \frac{N_c}{N_v} = \frac{E_c + E_v - 2E_f}{KT}$$

$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{KT}{q} \ln \frac{N_c}{N_v}$$ المعادلة (١-٢٦)

وفى حالة تساوى الكثافة الفعلية فى نطاق مستوى التوصيل والكثافة الفعلية فى نطاق مستوى التكافئ وكذلك تساوى الكتلة الفعلية لكل من الإلكترونات والثقوب ($m_p = m_n$) فان المعادلة (١-٢٦) يمكن تبسيطها كما يلى:

$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2}$$ المعادلة (١-٢٧)

---

[1] (law of electrical neutrality) فى قانون الإتزان الكهربائى ، الكثافة الكلية للشحنات الموجبة تساوى الكثافة الكلية للشحنات السالبة ، الكثافة الصافية للشحنات فى مواد أشباه الموصلات ($N_D+p=N_A+n$) ويبدو أنها تتعارض مع بعضها البعض ودائماً تساوى صفر

١ – ٨ المواد الغير جوهرية [٢]

فى هذه المواد لا يتساوى تركيز الإلكترونات والثقوب ونجد أن كثافة تركيز الإلكترونات فى المواد ذات الموصلية (ن) أكبر من عدد الثقوب – وتحدث ظاهرة التوصيل الكهربائى بالإلكترونات فى نطاق طاقة التوصيل ويتحرك مستوى فيرمى الى الأعلى فى إتجاه نطاق التوصيل ويظهر مستوى جديد من الطاقة يسمى مستوى الذرات المانحة ويرمز له بالرمز (E_D) – فى المواد ذات الموصلية (ب) نجد أن كثافة تركيز الثقوب أكبر من كثافة تركيز الإلكترونات – وتحدث ظاهرة التوصيل الكهربائى بالثقوب فى نطاق طاقة التكافئ ويتحرك مستوى فيرمى الى الأسفل فى إتجاه نطاق التكافئ ويظهر مستوى جديد من الطاقة يسمى مستوى الذرات المستقبلة ويرمز له بالرمز (E_A) ومن المهم التأكيد أنه بإضافة ذرة واحدة من مواد الشوائب من العمود الخامس أو العمود الثالث من الجدول الدورى للمواد الى ذرات مادة السيلكون أو الجرمانيوم – فإن مقدار طاقة التأين المطلوبة لمادة الجرمانيوم تساوى ٠٫٠١ إلكترون – فولت وتساوى ٠٫٠٥ إلكترون – فولت فى مادة السيلكون وتتزايد الموصلية الكهربائية للمواد بحوالى أثنى عشر مرة عن قيمتها فى المواد جوهرية البلورات– فى المواد ذات الموصلية (ن) لا يتزايد فقط عدد الإلكترونات ولكن تتناقص عدد الثقوب عن ما كانت عليه فى حالة المادة الجوهرية وذلك بسبب زيادة أعداد الإلكترونات تبعا لزيادة الشحنات المانحة والتى تتسبب فى زيادة معدلات الإتحاد مع الثقوب – وبالمثل يحدث فى المواد ذات الموصلية (ب) وفى كلا الحالتين فإن الإلكترونات فى المواد ذات الموصلية (ن) والثقوب فى المواد ذات الموصلية (ب) تسمى الشحنات الأغلبية أما الشحنات الأقل تسمى الشحنات الأقلية.

---

[٢] (extrinsic semiconductor) المواد الغير جوهرية هى مواد أشباه موصلات مخدرة (مضاف لها ذرات لمواد من غيرالعمود االرابع) بمعنى، إضافة عامل منشط ، يعطيها خصائص كهربائية مختلفة لمواد أشباه الموصلات الجوهرية(النقية)

١– ٨–١ كثافة الشحنات فى مواد أشباه الموصلات الغير جوهرية البلورات

يمكن إستنتاج إحتمال وجود إلكترونات فى مستوى الذرات المانحة(E_D) بالمعادلة (١– ٢٨):

$$f(D) = \frac{N_D - N_D^+}{N_D} = 1 - \frac{N_D^+}{N_D}$$ **المعادلة (١ – ٢٨)**

كذلك إحتمالات وجود إلكترونات فى مستوى الذرات المستقبلة (E_A) يمكن إستخراجها بالمعادلة (١ – ٢٩)

$$f(A) = \frac{N_A^-}{N_A}$$ **المعادلة (١ – ٢٩)**

حيث الرمزين (N_D و N_A) يمثلان المستويات المانحة والمستقبلة والرمزين (+ND و +NA) يمثلان مستويات التأين لهذه الذرات– يمكن إيجاد تركيز الشحنات المتأينة بإستخدام إحتمالات التوزيع بدالة فيرمى على النحو التالى:

$$N_D^+ = \frac{N_D}{g\,.e^{(E_f - E_D)/(KT + 1)}}$$ **المعادلة (١ – ٣٠)**

$$N_A^- = \frac{N_A}{g\,.e^{(E_A - E_f)/(KT + 1)}}$$ **المعادلة (١ – ٣١)**

الثابت (g) يميز هيكل مستويات الطاقة ويساوى ٢/١ ويمكن الحصول على كثافة الإلكترونات فى نطاق طاقة التوصيل وأيضا كثافة الثقوب فى نطاق طاقة التكافئ كما يلى :

$$N + N_A^- = P + N_D^+$$ **المعادلة (١ – ٣٢)**

إذا تساوت كثافة الشحنات المتأينة فى نطاقى الطاقة ($N_D^+ = N_A^+$) نحصل على مادة غير جوهرية البلورات لها نفس الخواص لمادة جوهرية البلورات – وبالتعويض فى المعادلة (١ – ٣٢) نحصل على :

$$\frac{N_c e^{(E_c - E_f)/KT} + \frac{N_D}{g} e^{-(E_A - E_f)/KT}}{N_v e^{(E_f - E_v)/KT} + \frac{N_D}{g} e^{-(E_f - E_D)/KT}} =$$ **المعادلة (١ – ٣٣)**

بفرض أن كل من المقدارين $((E_A-E_F)/kT>1)$ و $(E_F-E_D)/KT>1)$ أكبر من الواحد – نجد بعض الصعوبة فى حل المعادلة (١ – ٣٣) – وبالتالى يمكن تبسيطها لكلا نطاقى الطاقة كما يلى :

- فى حالة المادة ذات الموصلية (ن) :

حيث تركيز الإلكترونات المانحة أكبر من تركيز الثقوب المستقبلة $(N_D > N_A)$ وعدد لثقوب أقل من عدد الإلكترونات ($n > p$) يمكن تبسيط المعادلة (١ – ٣٢)– وحيث أن عدد الإلكترونات تساوى عدد الشحنات المانحة $(n = N_D)$ نحصل على:

$$N_c e^{-(E_c-E_f)/KT} = \frac{N_D}{g} e^{(E_f-E_D)/KT} \qquad (١ – ٣٤)$$

أو

$$\frac{N_c}{N_D/g} = e^{(2E_f-E_D-E_c)/KT} ,$$

منها نحصل على المعادلة (١ – ٣٥)

$$E_f = \frac{E_D + E_c}{2} - \frac{KT}{2}\log^{-g\left(\frac{N_c}{N_D}\right)} \qquad \text{المعادلة (١ – ٣٥)}$$

لو إفترضنا أن درجة الحرارة (T) تؤول الى الصفر – نحصل على :

$$E_f = \frac{E_D + E_c}{2} \qquad \text{المعادلة (١ – ٣٦)}$$

يمكن الحصول على كثافة الإلكترونات فى المادة ذات الموصلية (ن) وذلك بالتعويض بالمعادلة (١ – ٣٥) فى المعادلة (١ – ١٧)

$$n = N_c e^{-(E_c-E_f)/KT}$$

$$n = N_c e^{-\left[E_c-(E_c+E_D)/2+\frac{KT}{2}\log\left(\frac{gN_c}{N_D}\right)/KT\right]}$$

$$n = \frac{N_c}{\sqrt{\frac{gN_c}{N_D}}} e^{(E_D-E_c)/2KT} = \sqrt{\frac{N_D N_c}{g}} e^{(-\Delta E_D/2KT)} \qquad \text{المعادلة (١ – ٣٧)}$$

- **فى حالة المادة ذات الموصلية (ب):**

حيث تركيز الثقوب المستقبلة أكبر من تركيز الإلكترونات المانحة ($N_A > N_D$) وعدد الإلكترونات أقل من عدد الثقوب ($n < p$) يمكن تبسيط المعادلة (١ – ٣٢) ونحصل على :

المعادلة (١ – ٣٨) $p = N_A^-$

بالتعويض فى المادة ذات الموصلية (ن) نحصل على :

المعادلة (١ – ٣٩) $$E_f = \frac{E_v + E_A}{2} + \frac{KT}{2} \log e^{\frac{gN_v}{N_A}}$$

لو إفترضنا أن درجة الحرارة (T) تؤول الى الصفر – نحصل على كثافة الثقوب فى المواد ذات الموصلية (ب) .

المعادلة (١ – ٤٠) $$E_f = \frac{E_v + E_A}{2}$$

المعادلة (١ – ٤١) $$p = \sqrt{\frac{N_A N_v}{g}} e^{-(-\Delta E_A / 2KT)}$$

فى النهاية – سبق وإستنتجنا سابقا فى المعادلة (١ – ٢٤)

$$n_i^2 = n\ p$$

فى المادة ذات الموصلية (ن) فإن الإلكترونات هى الشحنات الأغلبية ويرمز لها بالرمز (n_n) وأيضا فإن الثقوب هى الشحنات الأقلية ويرمز لها بالرمز (p_n) وبالتالى يمكن إعادة كتابة المعادلة (١ – ٢٤) على النحو التالى:

المعادلة (١ – ٤٢) $n_i^2 = n_n\ p_n$

المعادلة (١ – ٤٣) $$P_n = \frac{n_i^2}{n_n} = \frac{n_i^2}{N_D}$$

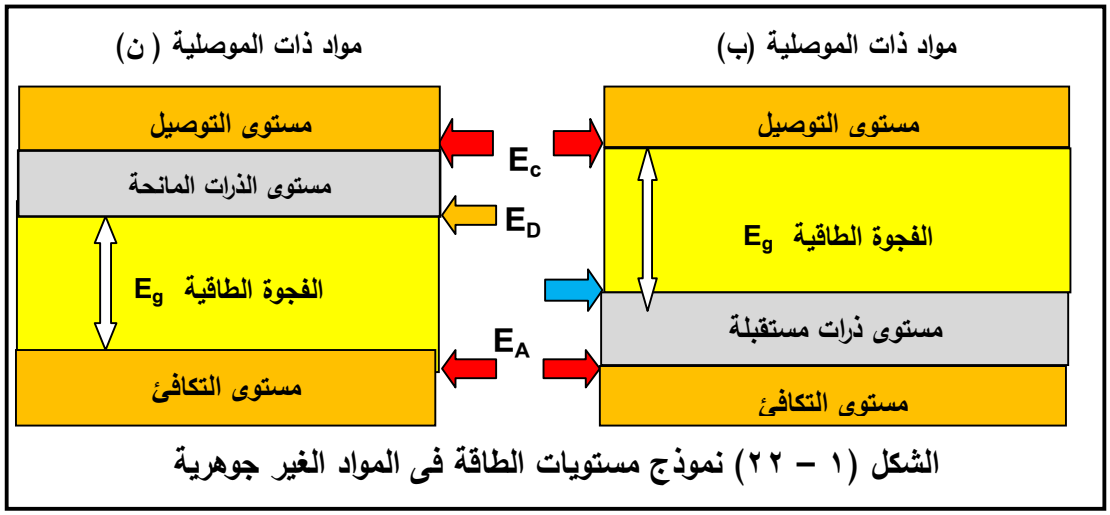
بالمثل فى المادة ذات الموصلية (ب) فإن الثقوب هى الشحنات الأغلبية ويرمز لها بالرمز (p_p) وأيضا فان الإلكترونات هى الشحنات الأقلية ويرمز لها بالرمز (n_p) وبالتالى يمكن إعادة كتابة المعادلة (١ – ٢٤) للمواد ذات الموصلية (ب) على النحو التالى:

المعادلة (١ – ٤٤) $n_i^2 = p_p\ n_p$

$$n_p = \frac{n_i^2}{p_p} = \frac{n_i^2}{N_A}$$ المعادلة (١ – ٤٥)

١ – ٨ – ٢ مستوى فيرمى فى المواد الغير جوهرية

تحتل الإلكترونات المانحة مستوى فى نطاق التوصيل مما يؤدى الى تحرك مستوى فيرمى الى مستوى طاقة أعلى فى إتجاه نطاق التوصيل كما هو موضح بالشكل (١ – ٢٢)



الشكل (١ – ٢٢) نموذج مستويات الطاقة فى المواد الغير جوهرية

وبالمثل فى المواد ذات الموصلية (ب) تحتل الثقوب المستقبلة مستويات طاقة فى حيز نطاق التكافئ مما يؤدى الى تحرك مستوى فيرمى الى مستوى طاقة فى إتجاه نطاق التكافئ– بزيادة درجة الحرارة تتأين كل الذرات المانحة وتتزايد كثافة الإلكترونات المتولدة حراريا فى مستوى طاقة التوصيل بالمقارنة بكثافة شحنات الإلكترونات المانحة– تحت هذا الشرط فإن كثافة الثقوب والإلكترونات تتساوى غالبا وتصبح المادة جوهرية البلورات كما هو موضح بالشكل (١ – ٢٢) . يمكننا أن نستنتج أنه بزيادة درجة الحرارة فى المواد الغير جوهرية يتحرك مستوى طاقة فيرمى فى إتجاه منتصف الفجوة الطاقية ويمكن تحديد مستوى طاقة فيرمى بدقة فى المادة ذات الموصلية (ن) إذا تم التعويض بعدد الإلكترونات يساوى عدد شحنات الذرات المانحة ($n = N_D$) تصبح المعادلة (١ – ١٧) على النحو التالى :

$$N_D = N_c \, e^{-(E_c - E_f)/KT}$$ المعادلة (١ – ٤٦)

المعادلة (١ – ٤٧) *for n–type*

$$E_f = E_c - KT \ln \frac{N_c}{N_D}$$

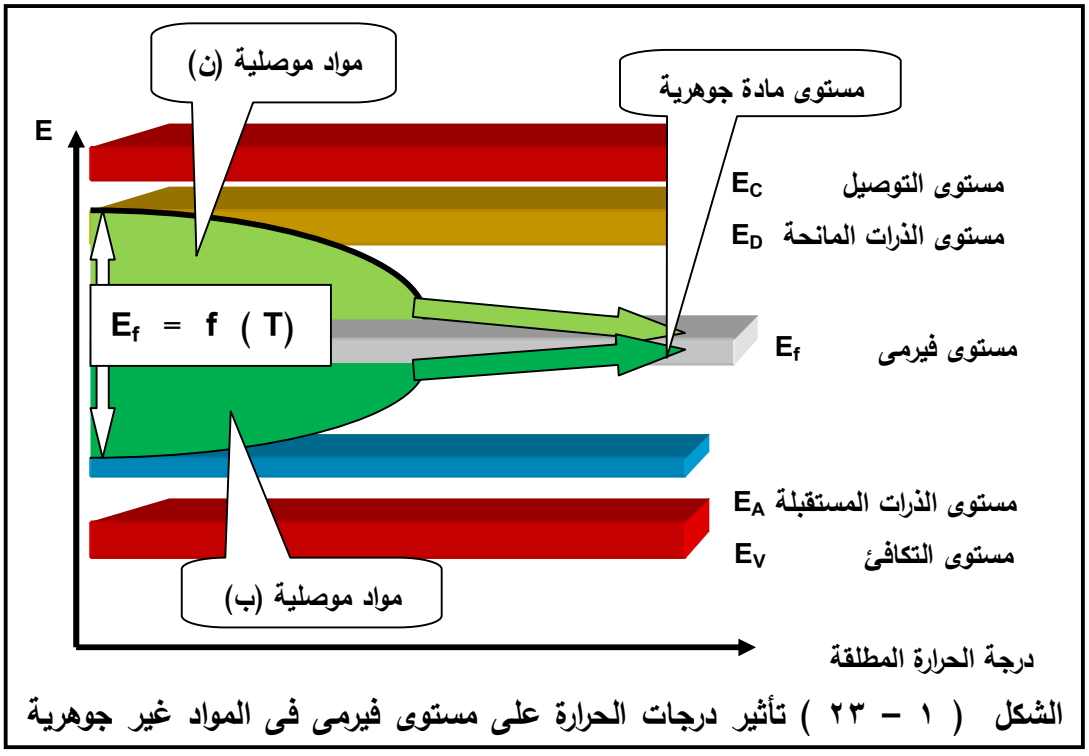
المعادلة (١ – ٤٨) *for p–type*

$$E_f = E_v - KT \ln \frac{N_v}{N_A}$$

مع ملاحظة فى حال تساوى كثافة الذرات المستقبلة والذرات المانحة ($N_A = N_D$) وبجمع المعادلتين (١ – ٤٧) و (١ – ٤٨) معا – نحصل على الصيغة النهائية لمستوى فيرمى فى مواد أشباه الموصلات

المعادلة (١ – ٤٩)

$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2} - \frac{KT}{2} ln \frac{N_c}{N_v}$$

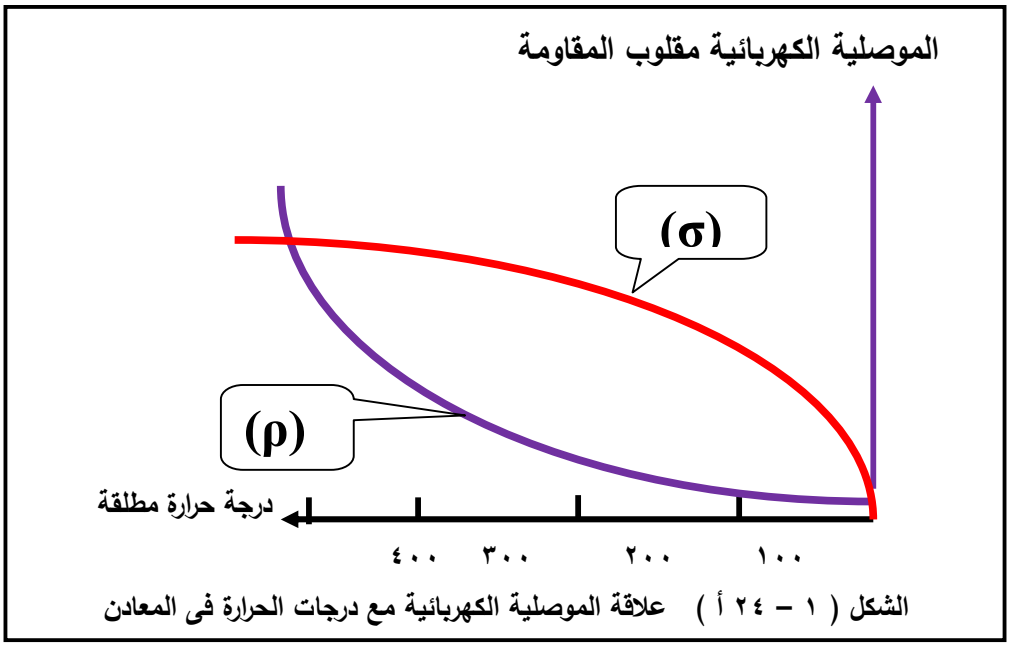


الشكل (١ – ٢٣) تأثير درجات الحرارة على مستوى فيرمى فى المواد غير جوهرية

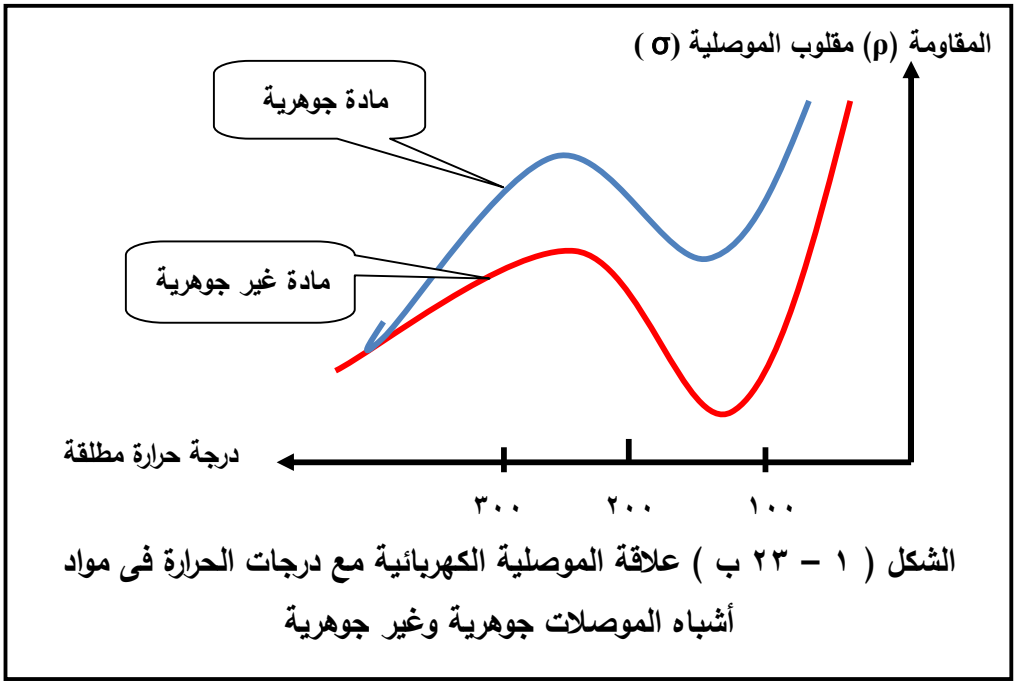
١ – ٩ إعتماد موصلية مواد أشباه الموصلات على درجات الحرارة

إعتماد موصلية مواد أشباه الموصلات على درجات الحرارة علاقة ذات أهمية قصوى لتطبيقات العناصر الإلكترونية المصنعة من مواد أشباه الموصلات– كما نعلم أن الموصلية الكهربائية فى المعادن تتناقص مع زيادة درجات الحرارة بسبب زيادة تواتر إصطدام الإلكترونات. أما فى مواد أشباه الموصلات فنجد أن الموصلية الكهربائية تتزايد بسرعة

بزيادة درجة الحرارة فى نطاقات معينة .



الشكل (١ – ٢٤ أ) علاقة الموصلية الكهربائية مع درجات الحرارة فى المعادن



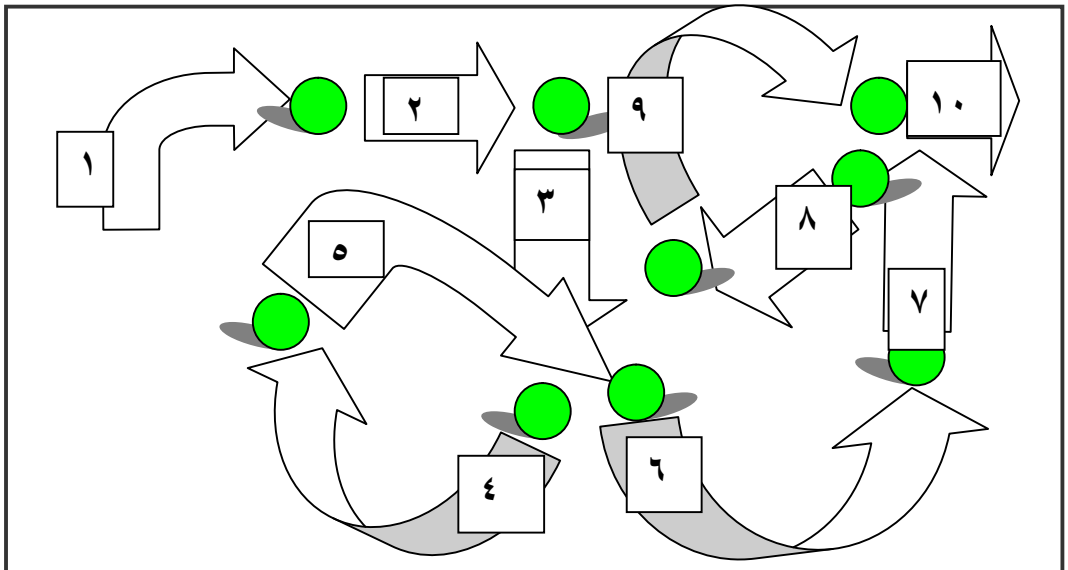
الشكل (١ – ٢٣ ب) علاقة الموصلية الكهربائية مع درجات الحرارة فى مواد أشباه الموصلات جوهرية وغير جوهرية

كما يوضح الشكل (١ – ٢٣ ب) – عند درجات الحرارة المنخفضة جدا نجد أن الشحنات متجمده دون أى إحتمال للحركة مما يتسبب فى إرتفاع شديد للمقاومة النوعية

للمادة – مع زيادة درجات الحرارة تتزايد حركة بعض حاملات الشحنات بسبب إكتسابها كمية من الحرارة تساعدها على التأين مما يتسبب فى تناقص المقاومة النوعية بشدة بسبب زيادة الشحنات المؤينة. إلا أنه بإرتفاع درجات الحرارة عن حد معين فإن كل ذرات المواد الشائبة تتأين كليا مما يتسبب فى زيادة التصادمات مما ينتج عنه إنخفاض الموصلية الكهربائية وتتزايد المقاومة النوعية مرة أخرى عكس ما يتم فى المعادن ومع إستمرار إرتفاع درجة الحرارة تتناقص المقاومة النوعية بحدة بسبب الإثارة الملموسة لجميع الشحنات عابرة الفجوة الطاقية فى إتجاه نطاق طاقة التوصيل.

١ – ١٠ مفهوم الحركية[٣]

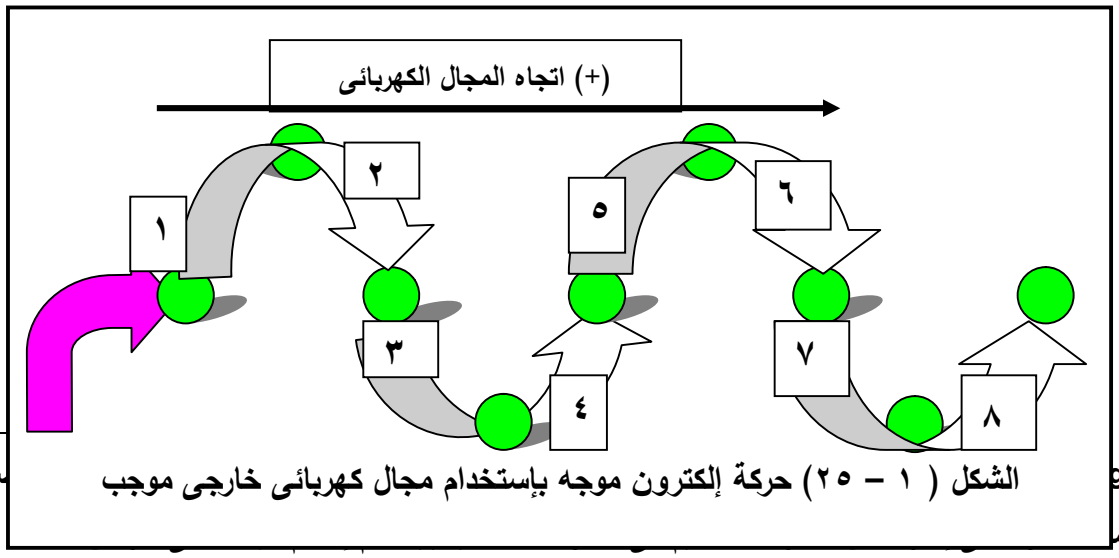
عندما يحقن إلكترون فى شريحة مادة شبه موصل مثالية جوهرية مع تعرضها الى مجال كهربائي خارجي في درجة الحرارة المطلقة يكتسب الإلكترون طاقة حركة مما يسمح له التجول بحرية خلال ذرات المادة كما هو مبين في الشكل (١– ٢٤).



الشكل (١ – ٢٤) حركة إلكترون عشوائية فى عدم وجود مجال كهربائى خارجى

[٣](mobility) فى فيزياء الجوامد ، توصف حركية الإلكترون بمدى سرعة حركته فى مواد المعدن أو مواد أشباه الموصلات عندما يتعرض الى مجال كهربائى. فى مواد أشباه الموصلات هناك كمية مماثلة للثقوب وتسمة حركية الثقب. يشير المصطلح بشكل عام إلى حركية الإلكترون والثقب في مواد أشباه الموصلات .

الشكل (١ – ٢٥) يوضح خاصية عامة مرتبطة بهياكل التكوين المثالية فى المادة ٠ فى درجة الحرارة المحيطة – تتحرر إلكترونات التكافئ خلال التكوين البلورى للمادة وتصل السرعة العشوائية للإلكترون فى درجات الحرارة المحيطة حوالى $١٠^{٧}$ سم/ ثانية – كما أن المسار الحر للإلكترون بين كل تصادمين يصل الى حوالى $١٠^{-٥}$ سم أى حوالى خمسمائة مرة مضروبا فى المسافة بين ذرتين٠ والزمن التقريبى بين التصادمين حوالى $١٠^{-١٢}$ من الثانية – بتأثير حالة الإتزان الحرارى فإن الحركة العشوائية للإلكترونات لا تتسبب فى وجود تيار كهربائى مار فى أى إتجاه ويمكن إعتبار التواتر الحرارى الناشئ على أنه جزيئ (فونون) ويسمى التصادم بين الفونون مع حوامل الشحنات السالبة والموجبة (الإلكترونات والثقوب) بالتشتت العشوائى[٤] وتتزايد ظاهرة التشتت مع زيادة درجات الحرارة الى حد أقصى يسمى سرعة التشتت القصوى– تكتسب الإلكترونات طاقة تساوى قيمة المجال الكهربائى مضروبا فى الشحنة الإلكترونية ($q\varepsilon$) وذلك فى حال توصيل مجال كهربائى الى شريحة مادة شبه الموصل فى إتجاه القطب الموجب كما هو موضح بالشكل (١ – ٢٥) وتتحرك الشحنات بعجلة قيمتها تستنتج بالمعادلة (١ – ٥٠)



الشكل (١ – ٢٥) حركة إلكترون موجه بإستخدام مجال كهربائى خارجى موجب

[٤] (g

سوت أو

جسيم

$$a = -\frac{q\,\varepsilon}{m}$$ المعادلة (١ – ٥٠)

تعانى الإلكترونات من التصادمات بعد زمن قدرة (τ) مما يتسبب فى تناقص سرعتها بين كل تصادمين متتاليين بقيمة تساوى العجلة مضروبه فى الزمن ($\Delta v = a\,\tau$) مما ينتج عنه ما يسمى سرعة الإنحراف[٥] (v_d)

$$v_d = \Delta v = -\frac{q\,\varepsilon}{m}\tau$$ المعادلة (١ – ٥١)

يمكن حساب حركية حوامل الشحنات من المقدار ($q\,\tau / m$) ويعاد صياغة المعادلة (١ – ٥١) لتصبح :

$$v_d = \mu\,\varepsilon$$ المعادلة (١ – ٥٢)

من المعروف فى أى من المواد أن حركية الإلكترونات أكبر من حركية الثقوب ($\mu_n > \mu_p$) على سبيل المثال تصل حركية الإلكترونات فى مادة السيلكون الى ١٨٠٠ سم^2 / فولت ثانية وتصل حركية الثقوب الى ٤٠٠ سم^2 / فولت ثانية – أما فى مادة الجرمانيوم تصل حركية الإلكترونات الى ٣٨٠٠ سم^2/ فولت ثانية وتصل حركية الثقوب الى ١٨٠٠ سم^2/فولت ثانية.

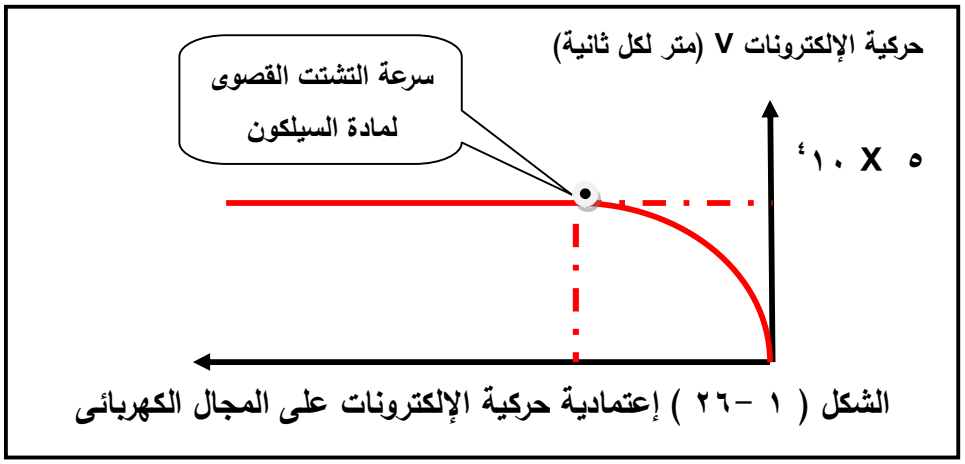
١-١٠-١ العلاقة بين حركية الشحنات والمجال الكهربائى

فى مواد أشباه الموصلات تتزايد سرعة إنحراف الشحنات بزيادة قيم المجال الكهربائى بسبب زيادة الطاقة الحركية للإلكترونات فى الشريحة. عندما يتزايد المجال الكهربائي تتزايد حركية الإلكترونات لقيمة حرجة وتصل إلى سرعة التشتت القصوى ولا تتزايد حركية

---

[٥] (drift velocity) سرعة الإنحراف هى سرعة السريان مثل الإلكترون عندما يعانى من مجال كهربائى. بصفة عامة ، سينتشر الإلكترون عشوائيا فى مواد أشباه الموصلات. الآليتين الرئيستين لتشتت الشحنات هما تشتت الشوائب المتأينة والتشتت البلورى.

الإلكترونات بأى زيادة للمجال الكهربائى بعد ذلك وتظل حركية الإلكترونات ثابتة عند سرعة التشتت القصوى كما هو موضح بالشكل (١ – ٢٦) ٠



الشكل (١ –٢٦) إعتمادية حركية الإلكترونات على المجال الكهربائى

١ – ١٠ – ٢ آليه ظاهرة إتحاد الشحنات

ثمثل آليه إتحاد الشحنات مستويات إلكترونية في الفجوة الطاقية لمواد أشباه الموصلات وتعتبر عيوب فى تكوين البلورات – الشوائب المعدنية الموجودة فى تكوين مواد أشباه الموصلات الغير جوهرية قادرة على تكوين مثل هذه المستويات من الطاقة داخل الفجوة الطاقية لمواد أشباه الموصلات– يتأثر معدل إتحاد الشحنات بحجم الشوائب والعيوب السطحية فى المادة وتتأثر الشحنات فى مواد أشباه الموصلات بثلاث عوامل أساسية هى:

أولا : درجات الحرارة

تتسبب الطاقة الحركية المتولدة حراريا بزيادة درجات حرارة شريحة شبه الموصل بسبب تواتر ذرات المادة وتعانى الشحنات من التصادمات ويمكن إيجاد العلاقة بين حركية الشحنات ودرجات الحرارة بالمعادلة

$$\mu_L = KT^{-3/2}$$ المعادلة (١ – ٥٣)

وقد ساهمت القياسات الفعلية على شريحة جرمانيوم جوهرية لتحديد قيم حركية الشحنات (الإلكترونات والثقوب) بالقيم التالية :

$$\mu_n = 4.9x10^7 T^{-1.66}, \mu_p = 1.05x10^9 T^{-2.33}$$

ثانيا : الشوائب

ينتج تشتت الشحنات عند وجود ذرات مانحة أو مستقبلة متأينة أو وجود شوائب وتعتبر نقاط أو مصائد مشحونة تتسبب فى إنحراف حركة الشحنات من خلال قوى إلكتروستاتيكية بين جسمين كما تتأثر سرعة حاملات الشحنات بزيادة كثافة هذه المصائد المشحونة؛ أيضا يجب ملاحظة أن التشتت والبعثرة العشوائية تتناقص بزيادة درجات الحرارة كما يتضح من المعادلة

المعادلة (١ – ٥٤) $\mu_I = \frac{K T^{3/2}}{N_I}$

حيث يمثل الرمز (N_I) كثافة المصائد المتأينة والتى تتسبب فى تناقص ملحوظ فى حركية الشحنات فى مادة السيلكون والتى تصل الى ٩٠٠ سم^2/ فولت ثانية (حوالى نصف قيمة السرعة القصوى ١٨٠٠ سم^2/ فولت ثانية) وتصل المقاومة النوعية الى ٠٫٠٦ أوم ٠

ثالثا : الإضطرابات والعيوب فى تكوينات المادة

تنشأ الإضطرابات والعيوب فى المواد نتيجة خلل فى التكوين البلورى ناتج من عدم ترتيب الذرات فى أماكنها المحددة والتى تتسبب بشكل أساسى فى تشتت الشحنات– على سبيل المثال فى مادة الجرمانيوم فإن هذا الخلل فى التكوين البلورى له الخصائص الكهربائية للذرات المستقبلة التى تؤثر فى حركية حاملات الشحنات كما يتضح من المعادلة

المعادلة (١ – ٥٥) $\mu_D = KT$

إذا أخذنا فى الإعتبار هذه المعايير الثلاثة ، نحصل على تعبير عام لتحديد تأثير هذه العوامل على حركية الشحنات كما يلى :

المعادلة (١ – ٥٦)

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_I} + \frac{1}{\mu_D}$$

$$\frac{1}{\mu} = \alpha_L T^{3/2} + \alpha_I T^{-3/2} + \alpha_D T^{-1}$$

ومن الجدير بالذكر التأكيد على أن العاملين الأول والثانى أكثر أهمية لإعتمادهم

الكبير على درجات الحرارة

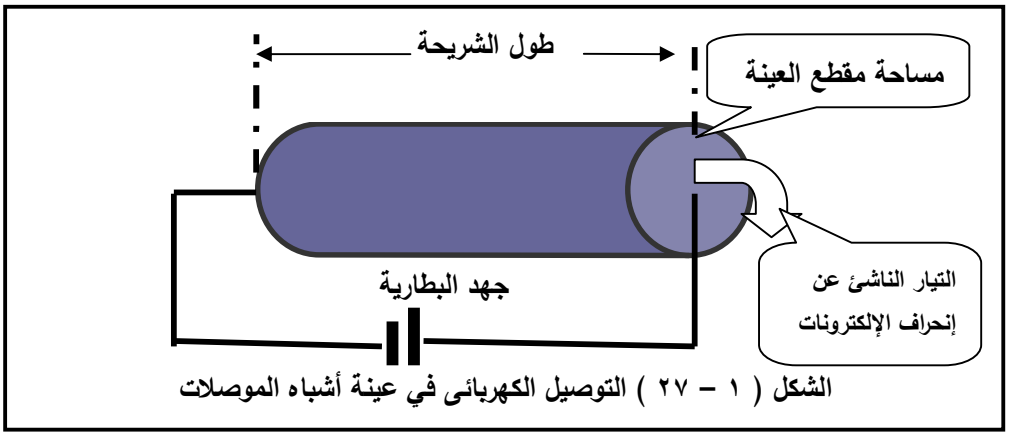
١ – ١١ تيار الإنحراف[٦]

ينشأ تيار الإنحراف نتيجة سريان الشحنات تحت تأثير المجال– التيار المار فى العينة الموضحة فى الشكل (١ – ٢٧) نتيجة لتدفق إلكترونات

$$I_n = - q\, n\, \vartheta_d\, A$$ المعادلة (١ – ٥٧)

بالتعويض فى سرعة إنحراف الإلكترونات بالمعادلة (١ – ٥٢) نحصل على:

$$I_n = -qn\ (\mu_n \varepsilon) A$$ المعادلة (١ – ٥٨)



الشكل (١ – ٢٧) التوصيل الكهربائى في عينة أشباه الموصلات

كما نعلم أن شدة المجال الكهربائى تساوى :

$$\varepsilon = \frac{V}{L}, R = \frac{V}{I}, \sigma = qn\ \mu_n$$

يمكن إيجاد قيمة مقاومة العينة من خلال عناصر التيار المار على النحو التالى:

$$R_n = \frac{\varepsilon L}{q A n \mu_n \varepsilon} = \frac{L}{q A n \mu_n} = \delta_n \frac{L}{A}$$ المعادلة (١–٥٩)

تستخدم نفس الخطوات لتحديد قيمة تيار الإنحراف فى ضوء عناصر الشحنات الموجبة

---

[٦] (drift current) عبارة عن تيار كهربائى أو حركة الشحنات بسبب التعرض الى مجال كهربائى وكثيراً ما يعرف كالقوة الدافعة الكهربائية على مسافة معينة، عندما يتم تطبيق مجال الكهربائي عبر مادة أشباه الموصلات، تنتج التياربسبب سريان الشحنات ،

(الثقوب) فى المواد ذات الموصلية (ب)

$$I_p = qp\ (\mu_p \varepsilon)A$$
$$\sigma_p = qp\ \mu_p$$
$$\delta_p = \frac{1}{qp\ \mu_p}$$

المعادلة (١ – ٦٠)

تشتمل مواد أشباه الموصلات على الشحنتين الإلكترونات والثقوب – وبالتالى:

$$\sigma_T = \sigma_n + \sigma_p$$
$$\sigma_T = q\left(n\mu_n + P\mu_p\right)$$
$$I_T = qA\ \varepsilon\left(n\mu_n + P\mu_p\right)$$

المعادلة (١ – ٦١)

فى مواد أشباه الموصلات الجوهرية

$$n = p = n_i$$
$$\sigma_i = qn_i\left(n\mu_n + P\mu_p\right)$$

المعادلة (١ – ٦٢)

حيث أن حركية الإلكترونات أكبر من حركية الثقوب ($\mu_n > \mu_p$) وبالتالى فى المواد الجوهرية تساهم الإلكترونات أكثر من الثقوب في قيم الموصلية ويبدو أن التوصيل بسبب الإلكترونات حيث يمكن إعتبار التوصيل في المواد الجوهرية كما هو الحال في المواد ذات الموصلية (ن) وتكون قيمة الموصلية فى المواد غير الجوهرية على النحو التالى :

$$\sigma_n = qn\,\mu_n where \quad n_n \rangle p_n$$
$$\& \ \sigma_p = qp\,\mu_p where \quad P_p \rangle n_p$$

١ – ١٢ تيار الإنتشار[٧]

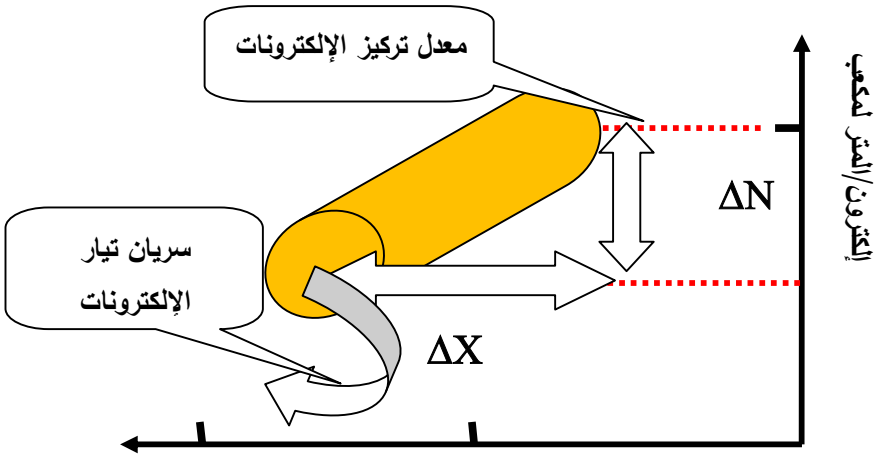
يسمى سريان الشحنات في مواد أشباه الموصلات بالإنتشار ويتضح أن تركيز الشحنات

---

[٧] **(Diffusion current) هو تيار فى مواد أشباه الموصلات ينتج بإنتشار الشحنات (الثقوب أو الإلكترونات)٠ يمكن أن يكون تيار الإنتشار فى نفس إتجاه تيار الإنحراف أو عكسة ٠ يتم وصف تيار الإنتشار وتيار الإنحراف معا بمعادلة الإنحراف– الإنتشار**

في مواد أشباه الموصلات ليست قيم موحدة- تبدأ عملية الإنتشار نتيجة لحركة الإلكترونات أو الثقوب من مستوى التركيز الأعلى الى مستوى التركيز الأقل بمعدل تناقص تدريجى مع المسافة حبث تركيز الشحنات ليست موحدة التوزيع وتختلف بإختلاف المسافة وتتحرك الشحنات (الإلكترونات والثقوب) عشوائيا نتيجة للطاقة الحرارية المكتسبة مما تتسبب فى زيادة التيار المار والذى يسمى تيار الإنتشار كما هو موضح بالشكل (١ – ٢٨) ويتبع تدفق إنتشار التيار قانون فيك الأول[٨]:

$$F = -D\frac{dN}{dx}$$ المعادلة (١ – ٦٣)



الشكل (١ – ٢٨) معدل إنتشار الإلكترونات

حيث الرمز(F) يمثل تدفق الشحنات ويمكن تعريفها بعدد الشحنات المارة فى المتر المربع فى الثانية٠ إنتشار الشحنات الصافى على السطح ينتج تيار الإنتشار ويتناسب مع التدرج النسبي لتركيز حاملات الشحنات – التيار المار خلال مساحة مقطع العينة (A) يساوى :

---

[٨] (Fick's first law) يمثل العلاقة بين المجال وكثافة التركيز فى الحالة المستقرة٠ فإنه يفترض أن المجال يتحرك من مناطق التركيز العالي إلى مناطق التركيز المنخفض، بكمية يتناسب مع تدرج التركيز التدرج ٠

$$I = qFA$$ المعادلة (١ – ٦٤)

وبناء على ذلك – فإن تيار الإنتشار التاتج عن حركة الإلكترونات يساوى:

$$I_n = qAD_n \frac{dn}{dx}$$ المعادلة (١ – ٦٥)

وأيضا – فإن تيار الإنتشار التاتج عن حركة الثقوب يساوى:

$$I_p = - qAD_p \frac{dp}{dx}$$ المعادلة (١ – ٦٦)

حيث تمثل الرموز (D_n) و (D_p) ثابت الإنتشار لكل من الإلكترونات والثقوب على التوالى وتوضح الإشارة السالبة فى المعادلة (١ – ٦٦) علاقة التيار الناتج عن حركة الثقوب فى الإتجاه الموجب الى معدل أعداد الثقوب كما يتناسب ثابت الإنتشار مع حركية حاملات الشحنات بإستخدم علاقة أينشتاين على النحو التالى:

$$\frac{D_p}{\mu_p} = \frac{D_n}{\mu_n} = V_T = \frac{KT}{q} = T/11600$$ المعادلة (١ – ٦٧)

فى مادة السيلكون ذات نسبة شوائب قليلة فى درجات الحرارة المحيطة فإن الحركية (μ) تساوى 39D = μ ٠ التيار الكلى الناشئ نتيجة الإلكترونات والثقوب عبارة عن حاصل جمع تيار الإنتشار وتيار الإنحراف كما يلى :

$$I_n = q A\left(n \mu_n E + D_n \frac{dn}{dx} \right)$$ المعادلة (١ – ٦٨)

$$I_p = q A \left(p \mu_p E + D_p \frac{dp}{dx} \right)$$ المعادلة (١ – ٦٩)

١ – ١٣ عمر الشحنات

فى المواد الجوهرية كما نعلم فإن عدد الإلكترونات يساوى عدد الثقوب وبناء على الإثارة الحرارية تنتج أزواج من الإلكترونات والثقوب وتختفى أزواج من الإلكترونات والثقوب كنتيجة لعملية الإتحاد بعد زمن يسمى عمر الشحنات ويرمز له (τ_n) و (τ_p) – متوسط عمر الشحنات يتراوح ما بين نانو ثانية الى مئات من الميكرو ثانية (١٠ $^{-٩}$ الى١٠ $^{-٦}$ ثانية) –

كنتيجة تعريض عمود من السيلكون للضوء بتردد مناسب يتزايد عدد الإلكترونات والثقوب فى العينة بنفس القدر – ويساوى :

$$P_{no} - P_{no} = n_{no} - n_{no}$$ المعادلة (١ – ٧٠)

حيث تمثل الرموز (p_{no}) و (n_{no}) كثافة تركيز الإتزان لكل من الثقوب والإلكترونات وتمثل القيم (p_{no}) و (n_{no}) تركيز الثقوب والإلكترونات أثناء تعريض عمود السيلكون الى الضوء٠ فى حال إلغاء مصدر الضوء تعود كثافة حاملات الشحنات الى قيم الإتزان بقيم ذات علاقة أسية مع ثابت زمنى (τ) يساوى متوسط عمر كل من الإلكترونات والثقوب ($\tau = \tau_n = \tau_p$) ويمكن إعادة كتابة المعادلة (١ – ٧٠) على النحو التالى :

$$P_n - P_{no} = \left(P_{no} - P_{no} \right) e^{-t/\tau}$$ المعادلة (١ – ٧١)

$$n_n - n_{no} = \left(n_{no} - n_{no} \right) e^{-t/\tau}$$ المعادلة (١ – ٧٢)

من المعادلتين (١ – ٧١) و (١ – ٧٢) يمكن حساب معدل تركيز الشحنات للتقوب كما يلى :

$$\frac{d P_n}{d t} = -\frac{P_n - P_{no}}{\tau} = \frac{d \left(P_n - P_{no} \right)}{d t}$$ المعادلة (١ – ٧٣)

كذلك يمكن حساب معدل تركيز حاملات الشحنات للإلكترونات كما يلى :

$$\frac{d\, n_n}{d t} = -\frac{n_n - n_{no}}{\tau} = \frac{d \left(n_n - n_{no} \right)}{d t}$$ المعادلة (١ – ٧٤)

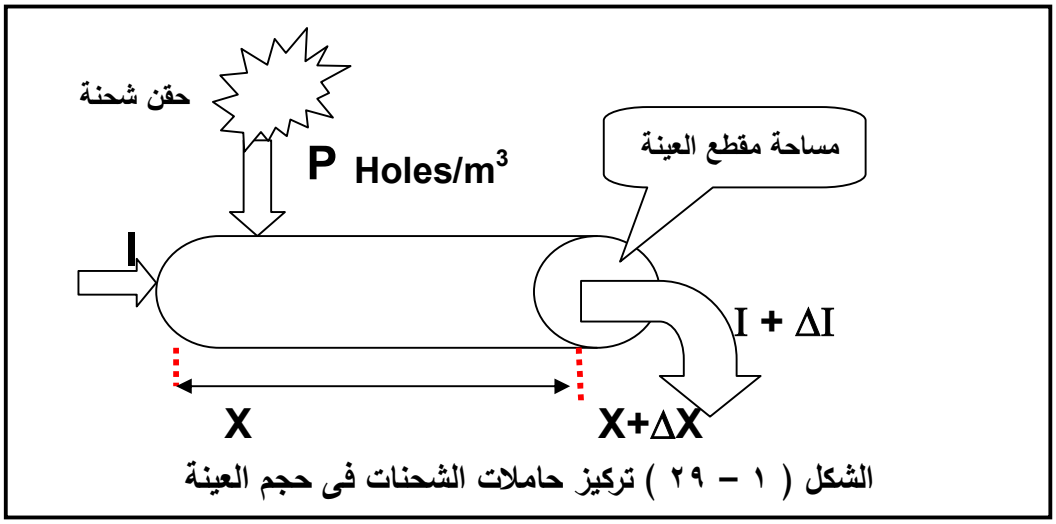
قيم تركيز الشحنات الأغابية والأقلية فى مادة شبه الموصل ($p_n - p_{no}$) أو($n_n - n_{no}$) يمثلان كثافة الشحنات الإضافية ومعدل تغيرها يتناسب مع كثافة هذه الشحنات – توضح علامة السالب أن التغير يتناقص فى حالة إتحاد الشحنات

١ – ١٤ معادلة الإستمرارية[٩]

إستنادا لحقيقة إنبعاث أو تلاشى الشحنات الكهربائية فإن تركيز حاملات الشحنات هى دالة لكل من الزمن والمسافة

المعادلة (١ – ٧٥) $q\ A\ dx\ \frac{P}{\tau_P}$

بإفتراض حجم عينة بمساحة مقطع (A) وطول (dx) كما فى الشكل(١–٢٩)



الشكل (١ – ٢٩) تركيز حاملات الشحنات فى حجم العينة

التغير الناشئ فى تركيز الشحنات الموجبة (الثقوب) وتناقصها من خلال عملية إتحاد الشحنات بمعدل (P/τ_p) فى وحدة حجوم العينة (A dx) وكان معدل التوليد الحرارى للإلكترونات والثقوب فى وحدة الحجوم يساوى (g) فإنه يمكن حساب زيادة تركيز الشحنات نتيجة التوليد الحرارى بالمعادلة (١ – ٧٦)

المعادلة (١ – ٧٦) $q\ A\ dx\ g$

بشكل عام فإن التيار المار ستتغير قيمته مع المسافة – فإذا كان التيار الداخل فى حجم العينة عند النقطة (x) قيمته (I) فإن التيار الخارج من العينة عند النقطة (x+dx)

---

[٩] (continuity equation) معادلة تصف إنتقال بعض الكميات ويمكن تعميمها لتطبيقها لأي كمية كبيرة٠ حيث يمكن حفظ الكتلة والطاقة والزخم والشحنات الكهربائية تحت ظروف مناسبة لكل منها ٠ هناك ظواهر فيزيائية عديدة يمكن تفسيرها بمعادلة الإستمرارية وهى أحد أشكال قانون حفظ الطاقة أن الطاقة لا تفنى ولا تستحدث وهذا يعنى أن كمية الطاقة ثابتة

يصل الى قيمة (I + dI) فهذا يعنى ان التغير الناشئ فى قيمة التيار فى وحدة الحجم يساوى (dI) فإذا كانت الزيادة فى التيار الناشئ نتيجة عملية الإنتشار فى حجم العينة يساوى (q A dx ∂p/∂t) وحيث أن الشحنات تميل لحالة الإتزان – نجد:

$$q\ A\ dx\ \frac{d\ P}{d\ t} = -\ q\ A\ dx\ \frac{P}{\tau_p} + q\ A\ dx\ g\ -\ d\ I$$

المعادلة (١ – ٧٧)

وحيث أن التيار الناشئ نتيجة حركة الثقوب هو حاصل جمع كل من تيار الإنتشار وتيار الإنحراف على النحو التالى :

$$I_p = -q\ A\ D_p\ \frac{dP}{dx} + q\ A\ P\ \mu_p\ \varepsilon$$

المعادلة (١ – ٧٨)

فى حالة أن تكون عينة شبه الموصل فى حالة إتزان حرارى وغير معرضة الى مجال كهربائى فإن كثافة الثقوب ستظل قيمة ثابتة وتصبح قيمة التيار تساوى صفر ومعدل تناقص تركيز الثقوب يساوى صفر حيث أن المجال الكهربائى يساوى صفر – لذلك :

$$g = \frac{P_o}{\tau_p}$$

المعادلة (١ – ٧٩)

توضح المعادلة (١ – ٧٩) أن معدل توليد الشحنات (الثقوب) حراريا تساوى معدل إتحاد هذه الشحنات فى حالة الإتزان– وبجمع المعادلات المعادلة (١– ٧٧) والمعادلة (١– ٧٨) والمعادلة (١–٧٩) نحصل على معادلة الإستمرارية أو معادلة الإحتفاظ بالشحنات

$$\frac{dP}{dt} = -\ \frac{P - P_o}{\tau_p} + D_p\ \frac{d^2P}{dx^2} - \mu_p\ \frac{d\ (P\varepsilon)}{dx}$$

المعادلة (١ – ٨٠)

فى حالة وجود شحنات موجبة (ثقوب) فى مادة بموصلية (ن) تؤول المعادلة (١ –٨٠) لتصبح :

$$\frac{d\ P_n}{d\ t} = -\ \frac{P_n - P_{no}}{\tau_p} + D_p\ \frac{d^2P_n}{dx^2} - \mu_p\ \frac{d\ (P_n\ \varepsilon)}{d\ x}$$

المعادلة (١ – ٨١)

تستخدم المعادلة العامة للإستمرارية المعادلة (١ – ٨١) لثلاث حالات خاصة:

- **الحالة الأولى عندما لا يعتمد تركيز الشحنات على المسافة عند جهد يسوى صفر:**

عندما يساوى المجال الكهربائى صفر ($\varepsilon = 0$) مع عدم إعتماد تركيز حاملات الشحنات على مسافة (x) – يمكن إعادة كتابة المعادلة (١ – ٨١) على النحو التالى :

$$\frac{dP_n}{dt} = -\frac{P_n - P_{no}}{\tau_p}$$ **المعادلة (١ – ٨٢)**

ونصل الى حل المعادلة المعادلة (١ – ٨٢) كما يلى :

$$P_n - P_{no} = (P_{no} - P_{no}^{-})\ e^{-t/\tau}$$ **المعادلة (١ – ٨٣)**

- **الحالة الثانية عندما لا يعتمد تركيز الشحنات على الزمن عند جهد يساوى صفر:**

عندما يكون المجال الكهربائى يساوى صفر ($\varepsilon = 0$) مع حالة الإستقرار عند زمن يساوى صفر فإن معدل التغير فى شحنات الثقوب يساوى صفر ($\partial p_n / \partial t = 0$) ويمكن إعادة كتابة المعادلة (١ – ٨١) على النحو التالى :

$$D_p \frac{d\ P_n}{d\ x^2} = \frac{P_n - P_{no}}{\tau_p}$$

$$\frac{d^2 P_n}{d\ x^2} = \frac{P_n - P_{no}}{D_p\ \tau_p}$$ **المعادلة (١ – ٨٤)**

ونصل الى حل المعادلة السابقة كما يلى :

$$P_n - P_{no} = K_1\ e^{-x/L_p} + K_2\ e^{x/L_p}$$ **المعادلة (١ – ٨٥)**

حيث تمثل الرموز (K_1) و(K_2) ثوابت تكامل وطول إنتشار شحنات الثقوب لمسافة إنتشار داخل العينة تساوى $L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$ حيث يتناقص تركيز الشحنات المحقنة الى (1/e) من قيمتها عند مسافة تساوى صفر

- **الحالة الثالثة عندما يتغير تركيز الشحنات على شكل موجة جيبية عند جهد يساوى صفر:**

عندما يساوى المجال الكهربائى صفر (ε = 0) ويتناقص تركيز شحنات الثقوب على شكل التردد الزاوي الجيبى

$$P_n(x,t) = P_n(x)e^{j\omega t}$$ المعادلة (١ – ٨٦)

بالتعويض بالمعادلة (١ – ٨٦) فى معادلة الإستمرارية المعادلة (١– ٨١) نحصل على :

$$j\omega P_n(x) = -\frac{P_n(x)}{\tau_p} + D_p \frac{d^2 P_n}{d x^2}$$ المعادلة (١ – ٨٧)

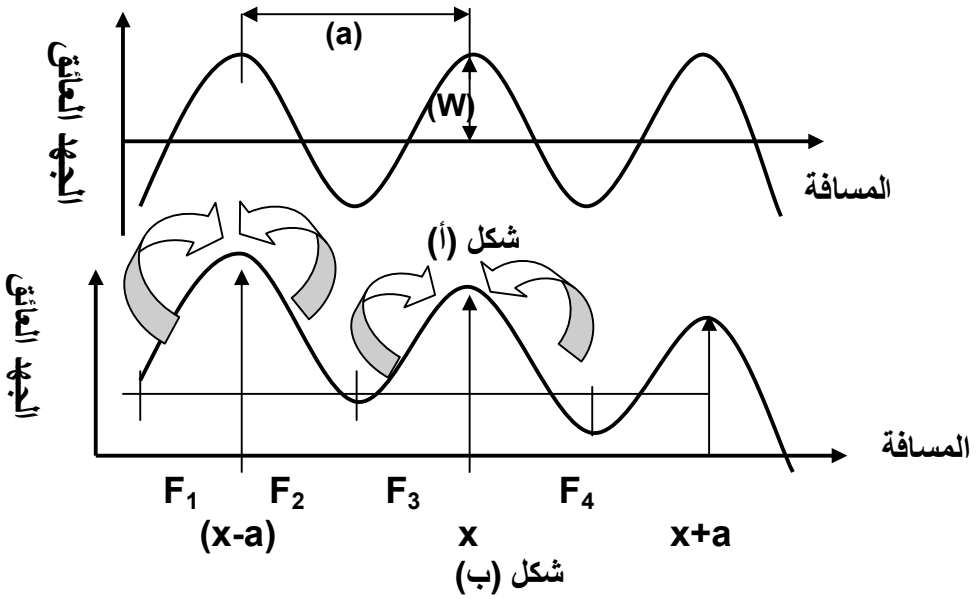
$$\frac{d^2 P_n}{d x^2} = \frac{1 + j \omega \tau_p}{L_p^2} P_n$$ المعادلة (١ – ٨٨)

عندما يساوى تدفق الشحنات صفر (F = 0) يمكن إعادة كتابة المعادلة (١ – ٨٨) على النحو التالى :

$$\frac{d^2 P_n}{d x^2} = \frac{P_n}{L_p^2}$$ المعادلة (١ – ٨٩)

١-١٥ تدفق فيض الجسيمات المشحونة

حركة الشوائب المشحونة في بلورة مادة شبة الموصل حيث تشكل الذرات فى البلورة سلسلة من القمم والتى تمثل جهد إعاقة لحركة الجسيمات المشحونة (W) والمقدرة بوحدة الإلكترون – فولت وذلك حتى يمكن تحديد صيغة رياضية لتدفق فيض الجسيمات المشحونة (F) – كما هو موضح فى الشكل (١-٣٠) – يوضح الشكل نموذج لحركة الأيونات الموجبة فى البلورة وتوزيع الجهد الكهربائى مع أو بدون مصدر تغذية- فى معظم المواد المسافة (a) بين قمم جهود الإعاقة المتتالية المحتملة والمماثلة لمسافات التباعد الشعرى فى البلورة والتى تقدر بوحدات الآنجستروم (الإنجستروم الواحد يساوى ١٠$^{-١٠}$ متر) ومع تطبيق مجال كهربائى ثابت نجد أن توزيع الجهد على طول العينة دالة للمسافة كما هو موضح فى الشكل (ب) والذى يسمح بتدفق فيض الجسيمات المشحونة الموجبة الى جهة اليمين أسهل كما يزيد من صعوبة تدفقها إلى اليسار ٠



الشكل (١-٣٠) نموذج لحركة الأيونات الموجبة فى البلورة وتوزيع الجهد الكهربائى

لحساب حركة تدفق الفيض (F) عند نقطة (x) على طول العينة، وهو متوسط التدفقات في المسافة (x – a/2)، والمسافة (x + a/2)، والممثلة بمتوسط فيض التدفقين بالقيم (f1–f2) و(f3–f4)٠ ولدراسة متوسط فيض التدفقات (f1–f2) و(f3–f4) – يتم تحليل أحد هذه المكونات – مثلا (F_1) والتى تتكون من حاصل ضرب المعاملات التالية :

١. كثافة الشحنات فى كل وحدة مساحة من الشوائب فى المنخفض عند المسافة (x – a)

٢. إحتمال نجاح القفزة من أي من هذه الجسيمات إلى المنخفض التالى عند المسافة (x)

٣. تكرار وتردد عدد محاولات القفز لأي من هذه الشوائب (ν)

وبالتالى يمكن إستنباط معادلة التدفق للفيض (F_1)

$$F_1 = [a\,C\,(x-a)]\,exp - \frac{q}{KT}\left(W - \frac{1}{2}\,a\,\epsilon\right)$$ المعادلة (١ – ٩٠)

حيث يمثل المقدار $[a\,C\,(x-a)]$ كثافة الجسيمات فى كل وحدة مساحة في المنخفض عند المسافة (x – a) – المعامل الأسى فى المعادلة يمثل إحتمال نجاح اى من هذه القفزات من المنخفض عند المسافة (x – a) الى المنخفض عند المسافة (x) – مع

ملاحظة إنخفاض الجهد العائق نتيجة للمجال الكهربائى (ε) على طول العينة – ويمكن الحصول على صيغ رياضية مماثلة لكل من تدفق الفيض (F_2) و(F_3) و(F_4) وبدمج مكونات الفيض الأربعة نحصل على صيغة رياضية لتدفق فيض الجسيمات المشحونة (F) عند المسافة (x) بكثافة الجسيمات المقدرة بالمقدار $\left(\partial C/\partial x\right) \pm a\ (C(x))$ والتى تساوى

$$F(x) = -\left(a^2 e^{-qW/KT}\right) cosh\ \frac{qa\epsilon}{2KT} + \left(2a\ a^2 e^{-qW/KT}\right) C\ sinh - \frac{qa\epsilon}{2KT}$$

المعادلة (١-٩١)

عندما يكون المجال الكهربائي صغير نسبيا، بمعنى (ε « KT/qa) – فى هذه الحالة يمكن تبسيط المعادلة مع ملاحظة أن (cosh (x) = 1) والمقدار (sinh (x) = x) للمسافة يؤول الى الصفر($x \rightarrow 0$)

$$F(x) = -D\frac{\partial C}{\partial x} + \mu\varepsilon C$$

المعادلة (١-٩٢)

$$D = a^2 e^{-qW/KT}$$

$$\mu = \frac{a^2 e^{-qW/KT}}{KT/q}$$

مع ملاحظة – أن الحركية (μ) ومعامل الإنتشار (D) يرتبطان بعلاقة أينشتاين المعروفة ويمكن إجراء إشتقاق مماثل لحركة الجسيمات المشحونة السالبة على النحو التالى:

$$D = D_o e^{-E_a/KT}$$

حيث يمثل المقدار (D_o) إنتشار الشحنات فى الأكسيد و(E_a) تمثل الطاقة النشطة.

وهكذا فان طاقة التنشيط المقابلة للطاقة المطلوبة لتشكيل الفراغات بتحطيم روابط الذرات فى السيلكون بدلاً من الطاقة اللازمة لنقل الشوائب. وتقدر طاقة التنشيط لإنتشار حوامل الشحنات المانحة والمستقبلة لأيونات الشوائب فى حدود ثلاث إلكترون فولت فى الجرمانيوم.